WNB Mathematik und Statistik, Musterlösung 3. Hausübung, Katharina Mehner-Heindl, WS 09/10

1. Aufgabe

Induktionsvoraussetzung: $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Induktionsanfang: hier muss der Induktionsanfang für n= 0 erfolgen, da die Summenformel ab i=0 angegeben ist.

$$\sum_{i=0}^{0} i^2 = 0 \text{ und } \frac{0(0+1)(2*0+1)}{6} = 0$$

Induktionsbehauptung: erhält man, indem man n durch n+1 ersetzt in der Induktionsvoraussetzung auf beiden Seiten

$$\sum_{i=0}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(n+1+1)(2*(n+1)+1)}{6}$$

Induktionsschritt : führt man durch, indem man zu der rechten Seite der Induktionsvoraussetzung das (n+1). Element ergänzt, in dem Fall addiert man $(n+1)^2$ zu der rechten Seite der Induktionsvoraussetzung hinzu. Dann will man zeigen, dass dieses Ergebnis dasselbe ist, wie wenn man die Formel direkt für (n+1) Elemente anwendet. Hier ist es am leichtesten, wenn man beide Ergebnisse getrennt ausrechnet und dann vergleicht.

1. Rechnung berechnet also das Hinzufügen von $(n+1)^2$ zur Induktionsvoraussetzung

$$\sum_{i=0}^{n+1} i^2 = \sum_{i=0}^{n} i^2 + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{6n^2 + 12n + 6 + 2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

$$= \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6}$$

2. Rechnung berechnet also das Ersetzen von (n+1) in der rechten Seite der Induktionsvoraussetzung

$$\frac{(n+1)(n+1+1)(2*(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6}$$

3. Vergleich: Die beiden Brüche sind identisch. Damit ist der Beweis erfolgt. (q.e.d.)

2. Aufgabe

$$-4x - 5y - 4z = -16$$
$$6x + 10y + 8z = -8$$
$$4z = 36$$

Zuerst liest man die Matrizen- und Vektorendarstellung ab. Der Spaltenvektor (x,y,z) muss nicht mitgeschrieben werden.
Dann bringt man die Matrix in die recht obere Dreiecksform, d.h. unterhalb der Diagonalen von oben links nach unten rechts sollen nur Nullen sein. Hier erreicht man das in einem notwendigen Schritt, weil nur noch eine Null erreicht werden muss.

$$\begin{bmatrix} -4 & -5 & -4 \\ 6 & 10 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 \\ -8 \\ 36 \end{bmatrix}$$ Optionaler Schritt: Division der letzten Zeile durch 4, um z ablesen zu können.

$$\begin{bmatrix} -4 & -5 & -4 \\ 6 & 10 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 \\ -8 \\ 9 \end{bmatrix}$$ Multiplikation der ersten Zeile mit 3 und der zweiten Zeile mit 2 und Addition.

$$\begin{bmatrix} -4 & -5 & -4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 \\ -64 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Wenn man z noch nicht wie oben ausgerechnet hat, würde man noch 4z = 36 nach z = 9 auflösen.
Rückwärtseinsetzen mit z=9 beginnend: 5y + 4*9 = -64 <=> 5y = -100 <=> y = -20
Rückwärtseinsetzen in der ersten Zeile: -4x -5*(-20) -4 *9 = -16 <=> -4x = -16 +36- 100 <=> x = 20

Darstellungsmöglichkeiten der Lösung: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ -20 \\ 9 \end{bmatrix}$ oder $\{x, y, z \in \mathbb{R} | x = 20, y = -20, z = 9\}$

3.Aufgabe

a) Die Folge muss entweder monoton fallend und nach unten beschränkt sein oder monoton wachsend und nach oben beschränkt.

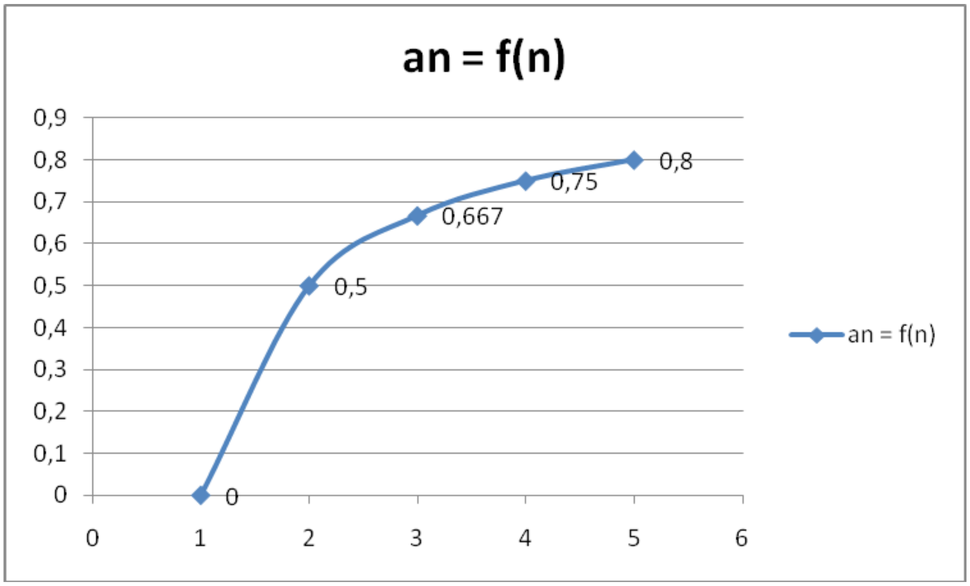
b) $a_{n+1} = a_n - 1$ und $a_1 = 0$

c) Infimum = 0; Supremum = 1;

$$Grenzwert = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1;$$

Diese Folge ist monoton wachsend

n	1	2	3	4	5
a_n	0	0.5	0.667	0.75	0.80



4. Aufgabe

a)

$a_{n+1} = a_n(1 - a_n)w$

$a_1 = 0.5$; $a_2 = 0.3$; $a_3 = 0.252$; $a_4 = 0.2261952$; $a_5 = 0.210037117$;

$a_6 = 0.199105831$; $a_7 = 0.191355238$; $a_8 = 0.185686093$

b)

$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = g \; und \; \lim_{n\to\infty} a_n = g$

g = g(1-g)*1,2 (kürzen durch g)

<=> 1 = (1-g)*1,2 v g = 0 (dies ist wichtig wenn man durch g kürzen will)

<=> 1 – 1,2= -1,2g v g = 0

<=> -0,2 / -1,2 = g v g = 0

<=> 1/5 : 6/5 = g v g = 0

<=> 1/6 = g v g = 0 sind beide mögliche Grenzwerte. Der Grenzwert hängt ab vom Startwert.

Alternativer Lösungsweg geht über Ausmultiplizieren und Lösen der quadratischen Gleichung.

5. Aufgabe

a) mittlere Monatslänge

$$Sei\ \bar{x}\ die\ mittlere\ Monatslänge = \frac{31+28+31+30+31+30+31+31+30+31+30+31}{12} = 30.416;$$

b) Standardabweichung

$$\Delta x = \sqrt{\frac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

$$\Delta x = 0.9$$

Zusatzaufgabe

a)

5x + y + z = 8,5
-5x   – z = -9,5
4x   + z = 7,5

Hier bietet es sich an, die zweite und dritte Zeile zu addieren, um z aus der dritten Gleichung zu eliminieren. Ansonsten würde man mit der zweiten Zeile versuchen, das x in der dritten Zeile zu eliminieren.

5x + y + z = 8,5
-5x   – z = -9,5
-x   = -2

Nach x auflösen ergibt x = 2.

Rückwärts einsetzen in die 2. Zeile ergibt -5 * 2 –z = -9,5 <=> -z = -9,5 + 10 = 0,5 <=> z = -0,5

x und z in der Zeile 1 einsetzen $\Leftrightarrow 5 * 2 + y - 0{,}5 = 8{,}5 \;\Leftrightarrow 10 - 0{,}5 - 8{,}5 = -y \;\Leftrightarrow y = -1$

b)

Definitionsbereich ist $\mathbf{N}$; Wertebereich ist $\mathbf{R}$;

Die Folge sin(n) hat :

- Das Supremum = 1;
- Das Infimum = -1;
- Keinen Grenzwert;

Da die Folge sin(n) wie die Funktion sin(x) ist, ist sie monoton fallend im Intervall $[\pi; 2\pi]$ und monoton wachsend

im Intervall $[0\,;\,\pi]$. D.h. sie ist insgesamt weder monoton fallend, noch monoton steigend.